0.1 Cinematica

IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE

Definizione Un corpo è in moto quando la sua posizione cambia nel tempo.

Definizione Un oggetto fisico viene detto *punto materiale* o "particella" se la sua massa è supposta essere tutta concentrata in un solo punto.

Un punto materiale in moto descrive una linea chiamata *traiettoria.*

Definizione La traiettoria di un corpo puntiforme, o punto materiale, è la linea che unisce le posizioni occupate successivamente dal corpo, ovvero le posizioni che occupa nel corso del tempo mentre cambia la sua posizione.

Si noti che il modello del punto materiale è applicabile esclusivamente quando l'oggetto considerato è piccolo e poco massivo rispetto allo spazio in cui si muove e la sua struttura interna è ininfluente.

Osservazione Il moto di un corpo è sempre *relativo* ad un sistema di riferimento. Cambiando sistema di riferimento, il moto cambia.

Andiamo ora a definire cosa si intende per "sistema di riferimento".

Definzione Per sistema di riferimento si intende un sistema composto da un origine, un sistema di assi coordinati e una nozione di misura del tempo.

Un sistema di assi cartesiani, o sistema di coordinate, è uno strumento necessario per individuare la posizione del corpo in una data porzione del piano o dello spazio. Chiaramente se ci troviamo nel piano saranno necessari solo 2 assi coordinati, mentre nello spazio ne occorrono 3. Il sistema di riferimento non è unico, pertanto siamo liberi di scegliere l'origine e il verso positivo degli assi a nostro piacere, a patto che, una volta eseguita tale scelta, si resti coerenti ad essa per tutto il proseguo della trattazione meccanica. Il sistema di riferimento è uno strumento che nasce spontaneamente ogni volta che cerchiamo di individuare la posizione di un oggetto in quanto per fare ciò siamo istintivamente portati a rapportare la posizione dello stesso rispetto ad un altro oggetto presente e gli assi cartesiani sono rispettivamente le direzioni rispetto a quali intendiamo indicare le distanze da percorrere per raggiungere l'oggetto di cui vogliamo indicare la posizione.

Dal momento che per conoscere il moto di un corpo è necessario conoscerne sia la posizione che come varia nel tempo è naturale, dunque, voler individuare un modo per misurare il tempo. Generalmente si misurarono gli *intervalli* di tempo, ovvero la variazione, rispetto all'unità di misura prescelta, tra due istanti successivi e per fare questo è consuetudine utilizzare un cronometro, ma si noti che la scelta dello strumento è assolutamente arbitraria.

Definizione La distanza percorsa è la lunghezza complessiva della traiettoria. Nel SI la distanza percorsa si misura in metri (m). Osserviamo che la distanza è *sempre positiva* e che essa non è una grandezza vettoriale, per cui non ha alcun verso.

Definizione Lo spostamento Δx di un punto materiale è il cambiamento di posizione, cioè la differenza fra la posizione finale x_f e quella iniziale x_i:

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{1}$$

Nel SI lo spostamento si misura in metri (m). Osserviamo che Δx può essere positivo, negativo o nullo a seconda che x_f sia maggiore, minore o uguale a x_i.

NOTA BENE È importante tenere presente che *distanza percorsa* e *spostamento* sono in generale grandezze fisiche *diverse*! Mentre la distanza percorsa dipende dalla traiettoria del punto materiale, lo spostamento è invariante per cambiamento di traiettoria.

Per descrivere il moto di un corpo non basta misurare i suoi spostamenti: bisogna anche misurare il tempo. Dobbiamo cioè associare le posizione successive del corpo a determinati istanti di tempo.

In generale, risolvere un problema di meccanica del punto materiale significa determinare la posizione del punto in funzione del tempo, cioè determinare la *legge oraria del moto*.

Definizione La legge oraria del moto è una funzione x(t) che descrive la posizione di un punto materiale al variare del tempo. Questa funzione contiene tutte le informazioni sul moto di un corpo.

È utile visualizzare il moto di un corpo rappresentando graficamente la sua posizione in funzione del tempo.

Definizione Un diagramma spazio-tempo è un grafico cartesiano in cui sull'asse orizzontale è riportato il tempo t e sull'asse verticale è riportata la posizione x. Ogni punto nel diagramma rappresenta un evento.

In generale, la legge oraria x(t) di un moto è rappresentata in un diagramma spazio-tempo da una curva.

ATTENZIONE Un errore da non commettere è quello di scambiare il *diagramma spazio-tempo* del moto di un corpo con la *traiettoria* del corpo.

Definizione La velocità scalare media è definitiva come il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato a percorrerla.

$$velocit\grave{a} scalare media = \frac{distanzapercorsa}{tempoimpiegato} \tag{2}$$

Il tempo impiegato è definito come l'intervallo di tempo tra l'istante iniziale e l'istante finale, cioè è $\Delta t = t_f - t_i$. La velocità scalare media ha le dimensioni fisiche di una lunghezza divisa per un tempo e nel SI si misura in *metri al secondo* ($\frac{m}{m}$). Si noti che siccome sia la distanza che il tempo impiegato sono grandezze positive è ovvio che anche la velocità scalare media sia positiva.

Invertendo la relazione che definisce la velocità scalare media otteniamo le altre 2 relazioni:

$$distanzapercorsa = velocit\grave{a} scalaremedia \cdot tempoimpiegato \tag{3}$$

$$tempoimpiegato = \frac{distanzapercorsa}{velocit\grave{a} scalaremedia} \tag{4}$$

Definizione La velocità media v_m è il rapporto tra lo spostamento Δx e il tempo Δt:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \tag{5}$$

Nel SI la velocità media si mura in metri al secondo ($\frac{m}{m}$). Invertendo la relazione che definisce v_m possiamo calcolare:

$$\Delta x = v_m \cdot \Delta t \tag{6}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_m} \tag{7}$$

ATTENZIONE La *velocità scalare media* e la *velocità media* sono grandezze fisiche *diverse*. La velocità media non ci informa soltanto su quanto rapidamente l'oggetto si sta muovendo, ma ci dice anche in quale verso esso si muove, cosa che, invece, non fa la velocità scalare media.

Definizione Il coefficiente angolare della retta che congiunge due punti del grafico spazio-tempo è uguale alla velocità media nell'intervallo di tempo tra i due punti.

La velocità media è una grandezza utile per caratterizzare il moto, ma a volte considerare solo tale grandezza può portare a conclusioni sbagliate. Per avere una rappresentazione più accurata dobbiamo calcolare la velocità media su intervalli di tempo più piccoli perché avendo a che fare con il moto di una qualsiasi particella, l'ideale sarebbe conoscere la sua velocità in ogni istante. Questa idea di una velocità corrispondente a ogni istante di tempo è proprio ciò che si intende con *velocità istantanea.* In termini matematici, la velocità istantanea è definita come il *limite* della velocità media $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, quando Δt tende a 0 e si scrive $\Delta t \to 0$. Man mano che l'intervallo Δt diventa piccolo, anche Δx diminuisce, ma il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tende ad un valore definito, che è la velocità istantanea.

Definizione La velocità istantanea è il valore limite della velocità media $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando $\Delta t \to 0$.

Nel SI la velocità istantanea si misura in metri al secondo ($\frac{m}{s}$). Mentre la velocità media si riferisce sempre a un determinato intervallo di tempo, la velocità istantanea si riferisce a *uno specifico istante.*

Se si effettua un analogo limite sulla velocità scalare media, si ottine la **velocità scalare istantanea**. Si troverebbe che la velocità scalare istantanea è uguale al valore assoluto della velocità instantanea.

Definizione La velocità istantanea in un dato istante è uguale a coefficiente angolare della retta tangente al grafico spazio-tempo nel punto corrispondente a tale istante.

Pertanto il diagramma spazio-tempo fornisce informazioni non solo sulla posizione della particella, ma anche sulla sua velocità. In particolare, notiamo che il coefficiente angolare di una retta è uguale a zero quando la retta è parallela all'asse delle ascisse.

Osservazione La velocità istantanea è uguale a zero nei punti in la tangente alla curva x(t) è orizzontale: questi sono i punti in cui la curva x(t) ha un massimo o un minimo.

Definizione Un moto rettilineo uniforme è un moto che avviene lungo una traiettoria rettilinea con *velocità costante.*

Pertanto riportando questo moto in un diagramma spazio-tempo, otteniamo una linea retta. È chiaro che le rette che congiungono due punti qualsiasi di questa retta e le tangenti in un punto qualsiasi coincidono con la stessa retta. In altri termini, se la velocità è costante, la velocità media in qualunque intervallo di tempo è uguale alla velocità istantanea in ogni istante. Il coefficiente angolare è costante e può essere calcolato prendendo un generico intervallo di tempo Δt e dividendo per esso lo spostamento corrispondente Δx:

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{8}$$

La legge oraria generale del moto rettilineo uniforme si ottiene dalla relazione (8) ponendo $t_i = 0, t_f = t, x_i = x_0 e x_f = x$:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{x - x_0}{t} \tag{9}$$

Moltiplicando primo e secondo membro per t e isolando a sinistra la x, otteniamo:

$$vt = \frac{x - x_0}{t} \cdot t \Rightarrow x = x_0 + vt \tag{10}$$

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned} v &= costante \\ x &= x_0 + vt \end{aligned} \tag{11}$$

In un diagramma spazio-tempo la legge del moto rettilineo uniforme è rappresentata da una retta di coefficiente angolare v, che interseca l'asse delle ordinate nel punto x_0. Nel caso in cui al tempo t=0 il corpo si trovi nel punto $x_0 = 0$ la legge oraria si semplifica e la retta corrispondente passa per l'origine degli assi.

Legge oraria del moto rettilineo uniforme (caso $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned} v &= costante \\ x &= vt \end{aligned} \tag{12}$$

Definizione L'accelerazione è una misura della variazione della velocità nel tempo.

Un oggetto accelera ogni volta che la sua velocità cambia, non importa in che modo: l'oggetto accelera sia quando la sua velocità aumenta sia quando la sua velocità diminuisce.

Definizione L'accelerazione media a_m di un corpo è il rapporto tra la variazione Δx della velocità istantanea del corpo e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene tale variazione:

$$a_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \tag{13}$$

L'unità di misura è il metro al secondo quadrato ($\frac{m}{s^2}$). Come la velocità media, l'accelerazione media può essere positiva, negativa o nulla.

Invertendo la relazione che definisce l'accelerazione media possiamo calcolare:

$$\Delta v = a_m \cdot \Delta t \tag{14}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a_m} \tag{15}$$

Osserviamo di passaggio che se non sono nulle, la velocità e l'accelerazione possono essere sia positive sia negative, a seconda che siano nel verso positivo o negativo del sistema di coordinate scelto in quanto sono grandezze vettoriali.

Consideriamo ora intervalli di tempo sempre più piccoli e definiamo l'accelerazione istantanea come il valore al quale tende l'accelerazione media $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando gli intervalli temporali diventano infinitesimi.

Definizione L'accelerazione istantanea è il valore limite dell'accelerazione media $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ quando $\Delta t \to 0$.

Nel SI l'accelerazione istantanea si misura in metri al secondo quadrato ($\frac{m}{s^2}$).

L'accelerazione istantanea può essere positiva, negativa o nulla.

Mentre l'accelerazione media si riferisce a un intervallo di tempo, l'accelerazione istantanea si riferisce a *uno specifico istante.*

Definizione Un moto uniformemente accelerato è un moto rettilineo con accelerazione costante.

Osserviamo che se l'accelerazione è costante, essa ha lo stesso valore in tutti gli istanti. Quindi possiamo dire quando l'accelerazione è costante, l'accelerazione istantanea e l'accelerazione media sono uguali.

Dalla definizione di accelerazione media abbiamo che:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \tag{16}$$

Essendo gli istanti iniziale e finale arbitrari, possiamo quindi porre $t_i = 0$ come istante iniziale, $v_i = v_0$ come velocità nell'istante iniziale, $t_f = t$ come istante finale e $v_f = v$ come velocità corrispondente, perciò la relazione precedente diventa:

$$a = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t} \tag{17}$$

cioè:

$$v - v_0 = at \tag{18}$$

dove v è la velocità nell'istante generico t.

Moto uniformemente accelerato

$$v = v_0 + at \tag{19}$$

Nel diagramma velocità-tempo, la relazione $v = v_0 + at$ è l'equazione di una retta che interseca l'asse delle velocità nel punto di ordinata v_0 e ha pendenza a.

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il corpo si trovi in x_0. La sua velocità media tra $t = 0$ e un tempo generico t è:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow v_m = \frac{x - x_0}{t} \tag{20}$$

Risolvendo rispetto a x otteniamo:

$$x = x_0 + v_m t \tag{21}$$

Questa relazione è *del tutto generale* e si può utilizzare sia quando l'accelerazione è costante sia quando non lo è.

Se l'accelerazione è costante, è utile scrivere la velocità meda in termini di velocità iniziale e finale. Consideriamo una velocità v_0 nell'istante $t = 0$ e una velocità v nell'istante successivo t. La velocità media durante questo intervallo di tempo è la media fra la velocità iniziale e quella finale. cioè è la somma delle due velocità divisa per 2:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \tag{22}$$

Ricordando che in un moto uniformemente accelerato la velocità v è data da $v = v_0 + at$, la velocità media diventa:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at) = v_0 + \frac{1}{2}at \tag{23}$$

Se sostituiamo questa espressione nella relazione $x = x_0 + v_m t$ scritta precedentemente, otteniamo alla fine:

$$x = x_0 + (v_0 + \frac{1}{2}at) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{24}$$

Legge oraria del moto uniformemente accelerato

$$\begin{array}{l} a = costante \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{array} \tag{25}$$

In un diagramma spazio-tempo questa è l'equazione di una parabola che interseca l'asse x nel punto $x = x_0$. Se all'istante $t = 0$ il corpo si trova in $x_0 = 0$, la parabola passa per l'origine. Se l'accelerazione è positiva ($a > 0$), la curva ha la concavità rivolta verso l'alto, se l'accelerazione è negativa (cioè $a < 0$), la curva ha la concavità rivolta verso il basso.

Osservazione Nel diagramma velocità-tempo la distanza percorsa da un oggetto dall'istante t_1 all'istante t_2 è uguale all'*area* della parte di piano sottesa alla curva della velocità tra questi due istanti.

Consideriamo un corpo che parte con velocità iniziale v_0 dalla posizione x_0. Con queste condizioni la legge oraria e la relazione velocità-tempo sono, rispettivamente:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{26}$$

$$v = v_0 + at \tag{27}$$

Ricavando il tempo dalla relazione (27), $t = \frac{v - v_0}{a}$, e sostituendo nella (26), otteniamo

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 (\frac{v - v_0}{a}) + \frac{1}{2} a (\frac{v - v_0}{a})^2 = (\frac{v - v_0}{a})[v_0 + \frac{1}{2} a (\frac{v - v_0}{a})] \tag{28}$$

Ovvero abbiamo ottenuto che:

$$\Delta x = (\frac{v - v_0}{a})[v_0 + \frac{1}{2} v - \frac{1}{2} v_0] = (\frac{v - v_0}{a})(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v_0) = \frac{1}{2}(\frac{v - v_0}{a})(v + v_0) \tag{29}$$

Dalla catena di uguaglianze abbiamo ottenuto la seguente relazione tra velocità e spostamento:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \tag{30}$$

In sintesi, nel caso particolare in cui un corpo parte da fermo ($v_0 = 0$) dall'origine dell'asse x ($x_0 = 0$), si ha:

$$x = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow v^2 = 2ax \tag{31}$$

La relazione $v^2 = 2ax$ si può scrivere nella forma $x = \frac{v^2}{2a}$. Osserviamo che, se a è costante, la relazione tra lo spostamento x e la velocità v è una proporzionalità quadratica e il suo grafico è una *parabola*.

Leggi del moto uniformemente accelerato

$$\begin{array}{l} a = costante \\ v = x_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \end{array} \tag{32}$$

Il più famoso esempio di moto uniformemente accelerato è la caduta libera, cioè il moto di un oggetto che cade liberamente sotto l'influenza della gravità.

Definizione La caduta libera è il moto di un oggetto sottoposto *solo* all'influenza della gravità.

Galileo mostrò per primo che gli oggetti che cadono si muovono con accelerazione costante. Egli mostrò anche che oggetti di massa diversa cadono con la *stessa* accelerazione, purché la resistenza dell'aria sia tanto piccola da poter essere ignorata. Precisiamo che l'aggettivo *libera* significa "libera da qualsiasi altro effetto che non sia la gravità". Quindi, nella caduta libera si suppone che il moto non sia influenzato da alcuna forma di attrito o di resistenza dell'aria. Le leggi del moto di caduta libera non si applicano soltato alla *caduta* di un corpo intesa in senso stretto, ma a qualsiasi moto sotto l'innfluenza della sola gravità, quindi anche il moto di un oggetto lanciato verso l'alto è uno di essi. L'accelerazione prodotta dalla gravità sulla superficie terrestre è indicata con il simbolo g ed è detta accelerazione di gravità. Il valore di g varia al variare della posizione sulla superifice della Terra e al variare dell'altitudine. Il valore di g notoriamente utilizzato è il seguente:

$$g = +9,81\frac{m}{s^2} \tag{33}$$

NOTA: 1) se scegliamo un sistema di coordinate con direzione positiva verso l'alto, l'accelerazione nella caduta libera è $a = -g$; 2) se scegliamo un sistema con direzione positiva verso il basso, l'accelerazione nella caduta libera è $a = g$.

Ovvero ciò che si vuole dire è che a seconda del sistema di riferimento scelto, cambia il segno dell'accelerazione nella caduta libera, ma **mai** il segno dell'accelerazione di gravità che è sempre positivo.